Discipline : MATHEMATIQUES

Sections : SCIENCES EXPERIMENTALES & TECHNIQUE

Exercice	1	2	3	4	5	6	7
Thème	Complexe	Complexe	Probabilité	Probabilité	Espace	Suite	Statistique

Exercice n °1: (Session Principale 2001)

1) On considère le nombre complexe a = $-4\sqrt{3}-4i$
Déterminer le module et un argument de a.

2) Résoudre dans l'équation $Z^2 = -4\sqrt{3}-4i$
(On donnera les solutions sous forme trigonométrique).

3) Soit u = (-1-i) + $\sqrt{3}$ (1-i).
a) Calculer u^2.
b) En déduire le module et un argument de u.
c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O,e_1,e_2) ;
on considère les points A, B et C d'affixes respectives u ; $\sqrt{3}$ (1-i) et (-1-i).
Montrer que OBAC est un rectangle.

Corrigé :

I. De quoi s'agit-il?

- Forme trigonométrique d'un nombre complexe.
- Racines carrées d'un nombre complexe non nul.
- Nature d'un quadrilatère connaissant les affixes de ses sommets.

II. Indications et commentaires

1) Module et argument de a:

Il suffit d'appliquer les formules du cours; utiliser $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

en remarquant que $\frac{7\pi}{6}\equiv\pi+\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2) On rappelle que si $Z=re^{i\theta}$ et $z=pe^{i\alpha}$; $n\in N^*\setminus\{1\}$

alors $z^n=Z\Leftrightarrow\begin{cases}p=\sqrt[n]{r}\\ \alpha\equiv\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n};k\in\{0,1,2,.....,n-1\}\end{cases}$

si on prend Z=a et n=2 ; on trouve : $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ou

$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

3) a) On pourra écrire

$u^2 = (1+i)^2 + 3(1-i)^2 - 2\sqrt{3}(1+i)(1-i)$

on trouve $u^2 = a$

b) Remarquer que u est une racine carrée de a de partie réelle positive (ou de partie imaginaire négative).

D'après 2) on trouve $u = 2\sqrt{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + \sin\frac{19\pi}{12})$

c) L'écriture $u = (-1-i) + \sqrt{3}(1-i)$ se traduit par l'égalité vectorielle: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ donc OBAC est un parallélogramme.

Il suffit de montre de plus que $(OC) \perp (OB)$

On rappelle que :

$(OC) \perp (OB) \Leftrightarrow$

- $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$
- *ou*
- $\arg\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- *ou*
- *Réel* $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right) = 0$
- *ou*
- $\frac{\overline{Z_B}}{Z_C} = -\frac{Z_B}{Z_C}$

L'une des quatre méthodes permet de conclure.

Remarque: On peut aussi conclure par l'égalité des longueurs des diagonales [OA] et [OB].

Exercice n° 2 : (Session Principale 1999)

1) a- Résoudre dans C, l'équation d'inconnue z suivante :

$z^2 - 2i.z - 2 = 0$

b- Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$, on considère l'équation d'inconnue z complète :

(E) $z^2 - 2.e^{i\theta}.z + e^{2i\theta} - 1 = 0$

Résoudre l'équation (E).

3) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_1 = 2.e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_3 = -1 + e^{i\theta}$

a- Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b- Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

c- Déterminer le réel θ de $]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carré.

Corrigé:

I- De quoi s'agit t-il ?

- Equations du 2ème degrés dans C.
- Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe.
- Rectangle dont les sommets sont connus à partir de leurs affixes.

II- Indications et commentaires

1) a) Résolution de l'équation $z^2 - 2iz - 2 = 0$

C'est une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$, a, b et c complexes donnés (a =1, b= -2i et c= -2).

Puisque $b = 2(-i) = 2b'$ on peut calculer $\Delta' = b'^2 - ac$ et trouver les solutions :

$z' = \frac{-b' - \delta'}{a}$ et $z'' = \frac{-b' + \delta'}{a}$ avec δ' : une racine carrée de Δ'.

Le calcul donne $z' = i - 1$ et $z'' = i + 1$

On peut aussi calculer Δ et δ une racine carrée de Δ puis calculer $z' = \frac{-b - \delta}{2a}$ et

$z'' = \frac{-b + \delta}{2a}$

Remarque : il ne faut jamais écrire $\sqrt{\Delta}$ pour Δ complexe : le symbole $\sqrt{\ }$ ne peut être utilisé que pour des réels positifs.

b) Forme trigonométrique des solutions :

Rappel :

Si $z = x + y.i$, sa forme trigonométrique est $z = p(\cos\theta + i.\sin\theta)$ avec

$p = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Et θ une mesure de l'angle tel que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Dans le cas présent trouver que : pour z': $p = \sqrt{2}$ et $\theta \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$ pour z'': $p = \sqrt{2}$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $z' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z'' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) Résolution de l'équation (E)

En utilisant le rappel en 1) a), on obtient $\Delta' = 1; \delta' = 1; z' = e^{i\theta} - 1 \; et \; z'' = e^{i\theta} + 1$

3) a) Ecriture de $z_2 \; et \; z_3$ sous forme exponentielle (E)

On peut calculer le module de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et un argument de $z = \alpha$ tel que :

$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; et \; \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; où \; z = x + iy$

Dans le cas présent : pour z_2 par exemple $\left(e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta\right)$ on a :

$x = 1+\cos\theta \ et \ y = \sin\theta \ d'où \ |z_2| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \ et \ \cos\alpha = \dfrac{1+\cos\theta}{|z_2|}; \sin\alpha = \dfrac{\sin\theta}{|z_2|}$

A l'aide des formules trigonométriques on trouve :

Pour z_2 : $|z_2| = 2\cos\dfrac{\theta}{2} \ et \ \arg(z_2) = \dfrac{\theta}{2}$

Pour z_3 : $|z_3| = 2\sin\dfrac{\theta}{2} \ et \ \arg(z_3) = \dfrac{\pi+\theta}{2}$

Cependant pour le cas de l'exercice, il y a une méthode plus rapide :

* $z_2 = 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

Remarque : on sait que $= e^{-i}\dfrac{\theta}{2} + e^{i}\dfrac{\theta}{2} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ d'où $z_2 = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$p = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ qui est strictement positif car $\theta \in]0,\pi[\Rightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Avec la même méthode on trouve $z_3 = 2\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi+\theta}{2}}$

Remarque : on remplace dans l'expression

$z_3 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right) et \ par \ e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) OABC est un rectangle

Rappel : Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit. Donc on doit montrer :

(1) $OB = AC, OC = AB \ et \ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ ou bien

(2) $(OB)//(AC), OB = AC \ et \ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

Pour le cas présent la plus simple des méthodes est (1)

En effet, on a $OB = |z_2|; AC = |z_3 - z_2|$ etc.

On trouve $OB = 2\cos\dfrac{\theta}{2} = AC \ et \ OC = 2\sin\dfrac{\theta}{2} = AB$

Pour l'angle on applique la formule :

$\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) \equiv Arg\left(\dfrac{z_3}{z_2}\right) \equiv Arg(z_3) - Arg(z_2) \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right) - \left(\dfrac{\theta}{2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc OABC est un rectangle.

c) Calcul de θ pour que OABC soit un carré

D'après b) quelque soit θ , OABC est un rectangle, or un carré est un rectangle qui a deux cotés consécutifs isométriques. Il suffit d'onc d'écrire OB =OC et de résoudre l'équation trigonométrique $\cos\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta}{2}$ *qui donne* $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}$ *car* $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

D'où on trouve $\theta=\frac{\pi}{2}$

Exercice n°3: (Session Principale 2003)

Une urne contient deux jetons blancs numérotés -1; 1 et trois jetons noirs numérotés 1; 1;-1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux jetons de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:
   A:" Obtenir deux jetons de même couleur".
   B:" Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro".
   b) On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur la somme des numéros inscrit sur les deux jetons tirés.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton et par b le numéro inscrit sur le deuxième jeton tiré.

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les plans P et P' d'équations respectives:
x+ay+b=0 et x+by-a=0.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:
C: " P et P' sont parallèles".
D:" P et P' sont perpendiculaires".

Corrigé:

I. De quoi s'agit-il?

Probabilité:
- Tirage de jetons d'une urne.
- Probabilité d'un événement.
- Aléa numérique Espérance mathématique.

Espace:
- Plans parallèles.
- Plans perpendiculaires.

II. Indications et commentaires:

1) a) Calcul de p (A); A:" obtenir deux jetons de même couleur".

$$p(A)=\frac{C_2^2+C_3^2}{C_5^2}=\frac{2}{5}$$

Calcul de p (B); B:" obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro"

$$p(B)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$$

b)
- v $X(\Omega)=\{-2,0,2\}$
- v Faire le calcul de la probabilité de chaque événement (correspondant à chaque valeur de X).

On obtient :

x_i	-2	0	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X)=\sum x_i p(X=x_i)=\frac{-2+6}{10}=0{,}4$$

2) P: x+ay+b=0 P': x+by-a=0

- v P//P' $\Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow (a,b)\in\{(1,1);(-1,-1)\}$ alors

  p(C)=$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{40}=\frac{2}{5}$

- v $P\perp P' \Leftrightarrow ab=-1 \Leftrightarrow (a,b)\in\{(1,-1);(-1,1)\}$alors

  p (D)= $\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}$.

On rappelle que si P: a x+b y+c z+d=0 et P: a'x +b'y + c'z + d'=0 alors:

- v $P // P' \Leftrightarrow ab'-a'b=ac'-a'c=bc'-b'c=0$
- v $P\perp P' \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$

Exercice n°4 (Session principale 2002)

On dispose d'un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées

-1 ; -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1

On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure.

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :

A : « Les deux numéros obtenus sont différents »

B : « La somme des deux numéros obtenus est égale à 0 »

2) Soit C l'événement défini par

C : « Les deux numéros obtenus sont différents sachant que leur somme est égale à 0 »

Calculer la probabilité de l'événement C.

3) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur La somme des deux numéros obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité de l'événement : X > 0

Corrigé:

I. De quoi s'agit-il?

Probabilité :

- Lancer d'un dé cubique homogène deux fois
- Probabilité uniforme
- Probabilité conditionnelle
- Aléa-numérique

II. Indications et commentaires:

1) Calcul de p(A) : A : « Les deux numéros obtenus sont différents »

A = { (-1,0) ; (0,-1) ; (1,-1) ; (-1,1) ; (0,1) ; (1,0) }

D'où p(A) = $\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}\times 2+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times 2=\frac{11}{18}$

Calcul de p(B) : B : « La somme des deux numéros obtenus est égale à 0 »
B = { (-1,1) ; (1,-1) ; (0,0) }

D'où p(B) = $\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{36}$

2) Calcul de p(C) : C : « Les deux numéros obtenus sont différents sachant que leur somme est égale à 0 »
Alors C = A/B

D'où p(C) = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ A ∩ B = { (-1,1) ; (1,-1) }

= $\frac{2p((-1,1))}{p(B)}$

= $\frac{12}{36}\times\frac{36}{13}$

= $\frac{12}{13}$

3) a) Loi de probabilité de X

- Commencer par calculer X(Ω)
- Faire le calcul de probabilité de chaque événement (correspondant à chaque valeur de X)

X(Ω) = { -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 }

x_i	-2	-1	0	1	2
P(X= x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

b)Calcul de p(X >0)

Remarquer que p(X > 0) = p(X = 1) + p(X = 2)

On trouve p(X > 0) = $\frac{2}{9}$

Exercice n°5 (Session de contrôle 2004)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O, i , j , k) , on donne les points A(1,1,-2) ; B(1,2,-2) et C(0,1,1).

1)Montrer que les points A, B et C définissent un plan P.

2)Soit $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{k}$

a- Calculer $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$

b- En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est 3x+z-1=0

3)Soit Q le plan perpendiculaire à (AC) passant par A.

a- Donner une équation cartésienne de Q.

b- Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB).

4)Soit S_m l'ensemble des points M (x,y,z) tels que :

$x^2+y^2+z^2$ -2x-2my+4z+4=0 $m\in\Re$

a- Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.

b- Montrer que l'ensemble des points, I_m lorsque m varie dans $\Re$, est la droite (AB).

Corrigé:

I-De quoi s'agit-il?

Espace :

- Produit scalaire
- Equation cartésienne d'un plan
- Plans perpendiculaires
- Sphère (centre et rayon)

II. Indications et commentaires:

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$

Il suffit de vérifier que l'un des trois déterminants des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ est non nul.

Autrement : si $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ alors –1 = 0 ce qui est absurde

2) a) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$; $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Rappel : si $\vec{u_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ alors $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Attention : cette expression n'est valable que dans le cas où le repère est orthonormé

b) $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}\end{cases}$ alors $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan P

par suite P : 3x + z + d = 0
A est un point de P (par exemple) donne d = -1
Concl. P : 3x + z - 1 = 0

3) a)

- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan Q

alors Q : -x + 3z + d =0

- A est un point de Q alors d = 7

Concl. Q : -x + 3z + 7 =0

b)

- $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ donne P ⊥ Q
- A et B sont des points communs à P et Q

Alors P ∩ Q = (AB)

Remarque : On peut aussi déterminer P ∩ Q , puis vérifier que cette intersection n'est autre que la droite (AB).

4) a) S_m : $(x-1)^2 + (y-m)^2 + (z+2)^2 = 1+m^2$

Comme $1+m^2 > 0$ alors S_m est une sphère de centre $I_m(1,m,-2)$ et de rayon $R_m = \sqrt{1+m^2}$

Autrement : Appliquer la règle S : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est une sphère si et seulement si $a^2+b^2+c^2-4d > 0$; dans ce cas son centre est I(-a/2 , -b/2 , -c/2) et son rayon est $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

b) Les coordonnées de I_m vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = m \\ z = -2 \end{cases} \quad m \in IR$$

Il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice n°6 (Session Principale 2004)

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n - 1} \end{cases} \quad \text{pour tout n de IN}$$

1) a- Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1< U_n <2$
   b- Montrer que (U_n) est croissante.
   c- En déduire que (U_n) converge vers une limite que l'on déterminera .
2) Soit (V_n) la suite réelle définie sur IN par $V_n = \text{Log}(U_n - 1)$
   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b- Déterminer $\lim_{n\to+\infty} V_n$
   c- Retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Corrigé:

I-De quoi s'agit-il?

Suites :

- Sens de variation
- Convergence
- Suite géométrique – Limite

II. Indications et commentaires:

1) a) Appliquer le principe de raisonnement par récurrence :
   - On vérifie pour n=0
   - Pour un entier n , on suppose que la propriété est vraie pour n , puis on montre qu'elle est vraie pour n+1

b) Remarquer que pour un entier naturel quelconque n , on a $U_{n+1} – U_n$ est strictement positif .

c) Appliquer le théorème :

$$\begin{cases} (U_n) \cdot est \cdot croissante \\ (U_n) \cdot est \cdot majorée \cdot par\, 2 \end{cases}$$ alors (U_n) converge vers une limite l telle que $\frac{3}{2} \le l \le 2$

En posant f : x $\longmapsto$ 1+$\sqrt{1+x}$, on aura $U_{n+1} = f(U_n)$
Ne pas oublier de signaler la continuité de f en l avant d'écrire
l = f(l) . On trouvera l = 2

2) a) Pour un entier naturel n , on a :

$$V_{n+1} = Log(U_{n+1} - 1) = Log\sqrt{U_n - 1} = \frac{1}{2}Log(U_n - 1) = \frac{1}{2}V_n$$

alors (V_n) est une suite géométrique de raison q=$\frac{1}{2}$

b) $V_n = V_0 . q^n = -(\frac{1}{2})^n Log 2$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

Rappel: Si 0 < l t l < 1 alors $\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$

b) On a $U_n = e^{V_n} + 1$

Comme $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \\ x \sim e^x ..est..continue..en..0 \end{cases}$ alors lim e^{Vn} = 1

Par suite lim U_n = 2

Rappel :

SI $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \\ g \cdot est.continue.en.l \end{cases}$ alors $\lim_{x\to+\infty}(gof)(x) = g(l)$

Exercice n° 7 : (Session de Contrôle 1999)

Le rendement R d'une variété de blé (en quintaux par hectare) et la quantité E d'engrais azotés (en kilogrammes par hectare) utilisée pendant la culture sont indiqués dans le tableau suivant :

E (kg/ha)	50	60	70	80	90
R (q/ha)	35,7	41,4	45,7	47,2	50,8

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (E, R).
Que peut –on déduire ?

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de R en E.

3) Quel rendement peut –on prévoir une culture utilisant une quantité d'engrais azotés
E =100 kg /ha ?

Corrigé:

I- De quoi s'agit t-il ?

Statistiques :

- Cœfficient de corrélation
- droite de régression –lecture sur cette droite.

II- Indications et commentaires :

1)Calcul du cœfficient de corrélation linéaire du couple (E,R).

- Calculer la moyenne $\overline{E}$ de la quantité d'engrais azotés (en kilogrammes par hectare).

On trouve $\overline{E} = 70$

- Calculer la moyenne $\overline{R}$ du rendement de la variété de blé (en quintaux par hectare).

On trouve $\overline{R} = 44{,}16$

Rappel : * Se rappeler que le coefficient de corrélation linéaire du couple (E,R) (ou encore de E et r) qu'on note r(E,R) est le réel défini par $r(E,R) = \dfrac{\text{cov}(E,R)}{\sigma_E \sigma_R}$ où $\text{cov}(E,R)$ est la covariance de E et R.

σ_E est l'écart type de E.

σ_R est l'écart type de R.

- Se rappeler aussi que $\text{cov}(E,R) = \overline{ER} - \overline{E}x\overline{R}$
- Présenter le calcul sous forme de tableau récapitulatif en remarquant que $r(E,R)$ peut se calculer par la formule :

$$r(E,R) = \frac{\sum_{i=1}^{5} E_i R_i - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} R_i \sum_{i=1}^{5} E_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} E_i^2 - \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} E_i\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5} R_i^2 - \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} R_i\right)^2}}$$

On trouve r(E,R)=0,98

Comme on trouve que r(E,R) est très voisin de 1, on en déduit que l'une des variables peut être approchée par une fonction affine de l'autre.

2)Equation cartésienne de la droite de régression de R et E.

- Se rappeler que cette équation est donnée par : $R = a_E.E + b_B$

avec $a_E = \dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(E_i - \overline{E}\right)\left(R_i - \overline{R}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\left(E_i - \overline{E}\right)^2}$ *et* $b_E = \overline{R} - a_E.\overline{E}$

Le calcul de a_E peut se faire aussi à l'aide de la formule $a_E = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} E_i R_i - 5\overline{E}\,\overline{R}}{\sum_{i=1}^{5} E_i^2 - 5\overline{E^2}}$

On trouve : R = 0,36E+18,92

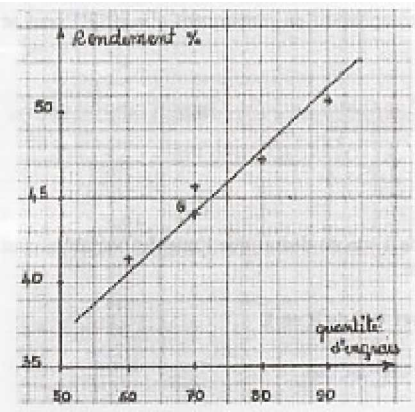
A noter :
* l'étude de la régression s'intéresse à la description et à l'analyse de la dépendance entre les deux caractères : rendement et quantité d'negrais azotés, elle concerne donc la nature de la correspondance entre les caractères alors que la corrélation mesure le degré de leur dépendance.

* le coefficient a_E =0.,36 (coefficient de régression du rendement par rapport à la quantité d'engrais azotés) indique que le rendement augmente en moyenne de 0,36 unités quand la quantité d'engrais azotés augmente d'une unité.

* La droite de régression passe par le point moyen $G(\overline{E}, \overline{R})$ (Centre de gravité du nuage)

A noter :
* Le coefficient de corrélation est indépendant des unités choisies pour les caractères et ne peut prendre que des valeurs comprises entre -1 et +1.
* Le coefficient de corrélation indique quelle mesure la liaison qui existe entre les deux variables peut être approchée par une relation affine , il mesure quantitativement le degré de dépendance des deux variables dont les droites de régression donnent une idée graphique.

* on peut présenter le nuage des points (E_i, R_i) et constater graphiquement que le point du nuage se repartissent autour d'une droite.



Nuage des points et droite de régression de R en E
NB : l'intersection des axes n'est pas l'origine du repère.

3) Rendement à prévoir pour une culture utilisant une quantité d'engrais azotés
E =100kg/ha
* prendre E =100 dans la formule R = 0,36E +18,92 on trouve alors
R =54,92(q/ha)
* Ne pas oublier l'unité.

A noter :
* Si on se pose la question de savoir quelle quantité d'engrais azotés est nécessaire pour avoir un rendement de 60(q/ha), on ne peut plus utiliser l'équation précédente, à savoir R =0,36E+18,92, mais on doit déterminer une autre droite de régression $E = a_R R + b_R$ et calculer à nouveau les cœfficients $a_R \; et \; b_R$ par des formules analogues. (on obtient la droite de régression de E en R.
* Les deux droites de régression se coupent au point moyen G, en forme de ciseaux. Plus ces ciseaux sont fermés, les plus grande est la dépendance entre les deux caractères étudiés.
S'ils sont confondus en une seule droite, alors il existe une relation linéaire entre eux.
* Le cœfficient de corrélation r(E,R) et les cœfficients de régression $a_E \; et \; a_R$ sont liés par la relation $r^2(E,R) = a_E a_R$

Problème	1	2	3	4
Thème	Fonction en exponentielle	Fonction en logarithme	Fonction en racine carrée	Interprétation graphique d'une fonction en exponentielle

Problème n°1: (Session Principale 2002)

Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité: 2 cm).

I. 1)

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout x on a : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que le point $I(0,\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C).

e) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point I.

2) a) Montrer que pour tout réel t , on a : $f'(t)\le\dfrac{1}{2}$

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente, montrer que pour $x\ge 0$ on a: $f(x)\le\dfrac{1}{2}(x+1)$

c) Déterminer la position de (C) par rapport à (T).

3) Tracer (T) et (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) a) Montrer que f est une bijection de $\Re$ sur $]0,1[$

b) Soit y$\in$ $]0,1[$. Déterminer le réel x tel que f(x)=y.

c) En déduire la représentation graphique dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de la fonction g définie sur $]0,1[$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}Log\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

II. On considère la suite $I_n=\int_0^1\dfrac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}dt$

1) a) Montrer que I_n est décroissante et positive.
b) En déduire que I_n est convergente.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $I_n\le\dfrac{1}{2n}$

3) Trouver la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Corrigé:

I- De quoi s'agit-il?

- Fonctions exponentielles, variations, tangente, inégalité, centre de symétrie, fonction réciproque, courbes de f et f^{-1}
- Suite définie à l'aide d'une intégrale, encadrement et limite.

II- Indications et commentaires:

Partie 01

1) a) Calcule de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

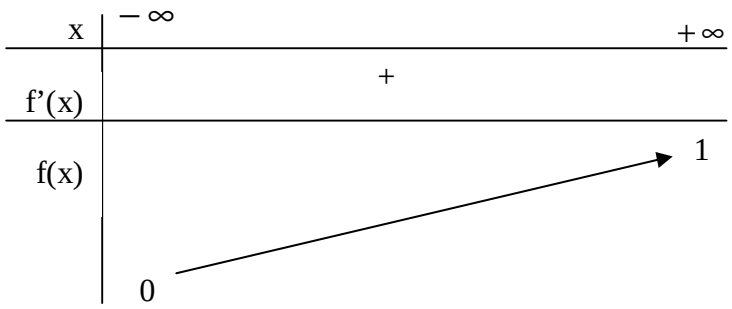
ü $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)} = 1, car \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

ü $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = 0, car \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = 0$

b) $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$

Il suffit d'appliquer la formule de la dérivée de la fonction $\frac{u}{v}$.

Tableau de variation de f:



c) Le point I $(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C):

Pour tout $x \in \Re$, on a: $f(2\times 0 - x) + f(x) = 1 = 2\times\frac{1}{2}$ alors I$(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C).

d) Equation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point I: On applique la formule:

$\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ on obtient (T): $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2) a) Montrer que f'(t) $\leq \frac{1}{2}$ pour tout réel t.

Il suffit d'écrire f'(t) - $\frac{1}{2}$ et d'étudier son signe.

On montre que f'(t)- $\frac{1}{2}$ se met sous la forme : $\frac{-\left(1-e^{2t}\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$ qui est négatif quelque soit $t \in \Re$

b) Montrer que $f(x) \le \frac{1}{2}(x+1)$ pour $x \ge 0$ Il suffit d'intégrer les deux membres de l'inégalité: f'(t) $\le \frac{1}{2}$ sur $[0, x]$ puisque $x \ge 0$

En effet, on a f'(t) $\le \frac{1}{2}$.

$$x \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^x f'(t)dt \le \int_0^x \frac{1}{2}dt \Leftrightarrow f(x) - f(0) \le \frac{1}{2}(x-0)$$

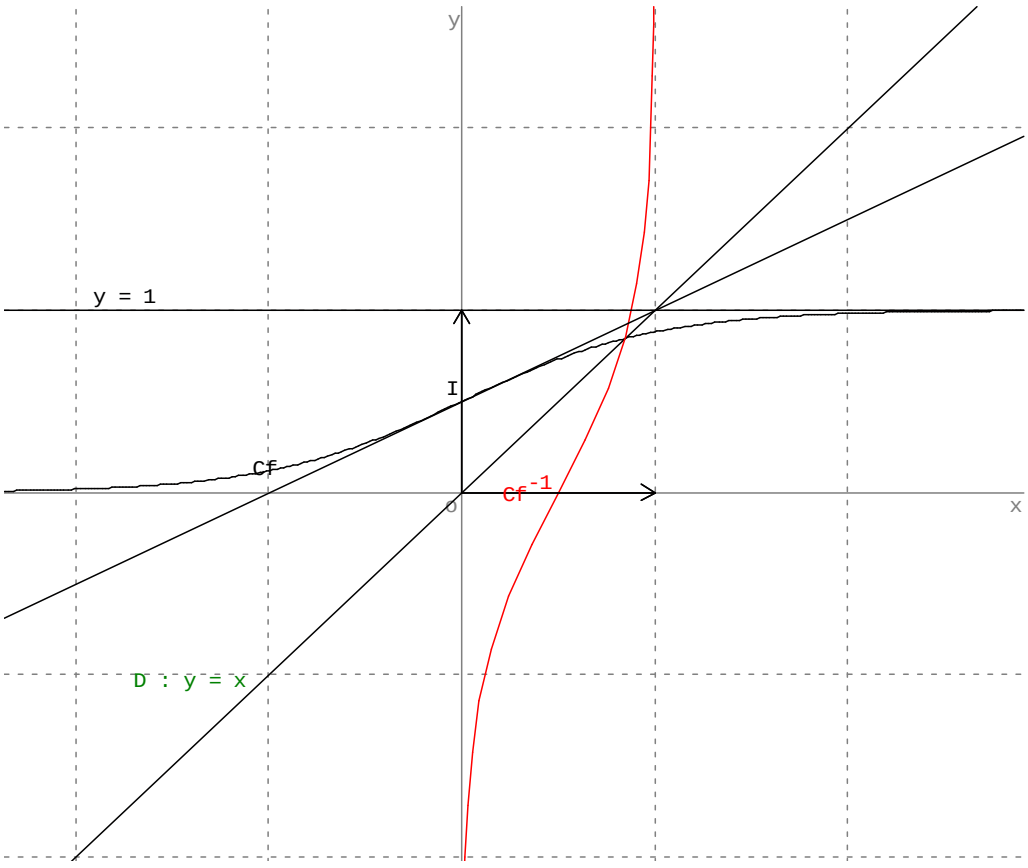
$$\Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

c) Position de la courbe (C) par rapport à (T):

Remarquer que : $f(x) \le \frac{1}{2}(x+1)$ pour $x \ge 0$

Alors (C) est au dessous de (T) pour $x \ge 0$; et comme I est un centre de symétrie, alors (C) est au dessus de (T) pour $x \le 0$

3) Construction de (T) et (C).



4) a) Montrer que f est une bijection de $\Re$ sur $]0, 1[$

- f est continue sur $\Re$.
- F est strictement croissante sur $\Re$.

Alors f est une bijection de $\Re$ vers f ($\Re$)= $]0, 1[$

b) Soit $y \in]0,\ 1[$.Déterminer le réel x tel que f(x)=y.

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} Log\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Alors: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} Log(\frac{x}{1-x})$ pour $x \in [0,1]$

c) Représentation graphique de la fonction g définie sur $]0,\ 1[$ par $g(x) = \frac{1}{2} Log(\frac{x}{1-x})$.

Remarquer que g=f $^{-1}$alors $(C_g) = S_\Delta(c); \Delta : y = x$

Partie 02:

1) a) Montrer que I_n est une suite décroissante et positive.

$$I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{0} \frac{e^{2(n+1)t} - e^{2nt}}{1+e^{2t}} dt = \int_{-1}^{0} \frac{e^{2nt}\left(e^{2nt} - 1\right)}{1+e^{2t}} dt$$

Comme $-1 \le t \le 0$ alors $e^{2t} - 1 \le 0$ $donc$ $I_{n+1} - I_n \le 0$ par suite I_n est décroissante.

Remarquer que : pour tout $t \in [-1,0]: \frac{e^{2nt}}{1+e^{t}} \ge 0$ $alors$ $I_n \ge 0.$

b) Déduction « (I_n) est convergente ».

Appliquer le théorème:" toute suite décroissante minorée est convergente".

2) Montrer que pour tout $n \in N^* : I_n \le \frac{1}{2n}$.

Remarquer que:

$$\frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}} \le e^{2nt} \ car \ 1+e^{2t} \ge 1 \ alors$$

$$I_n \le \int_1^0 e^{2nt} dt \Leftrightarrow I_n \le \frac{1}{2n}\left[e^{2nt}\right]_{-1}^{0} \Leftrightarrow I_n \le \frac{1}{2n}\left(1-e^{-2x}\right) \ par \ suite \ \Leftrightarrow I_n \le \frac{1}{2n}$$

$car \ 1-e^{-2n} \le 1$

3) Limite de u_n quand n tend vers$+\infty$.

Appliquer le théorème:

$$\text{Si} \begin{cases} 0 \le u_n \le v_n \\ et \qquad alors \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{nx\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$$

Problème n°2: (Session principale 2003)

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2+1-Logx$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a : $g(x)$ ¤ 0

B) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + 2 + \frac{Logx}{x}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout x strictement positif, on a:

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation cartésienne.

b) Etudier la position relative de (C) et Δ.

3) Pour tout réel x de $[1,+\infty[$,on considère les points M(x, f(x)) et N(x,x+2).

a) Vérifier que la distance MN est égale à $\frac{Logx}{x}$

b) Pour quelle valeur x_0 de x la distance MN est-elle maximale?

c) Montrer que la tangente T à (C) au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ.

4) Tracer Δ,T et (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) a) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives: y = x+2; x =1 et x =e.

b) Soit α un réel strictement supérieur à e. Déterminer α pour que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites respectives:
y = x+2, x =e et x =α soit égale à A.

Corrigé :

I- De quoi s'agit-il?

Fonctions logarithmes, variations, signe, asymptote, courbe, position relative de la courbe et une asymptote, tangente, calcul d'aire.

II- Indications et commentaires:

A) $g(x) = x^2 + 1 - Logx$ pour x>0.

1) Tableau de variation de g:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
g'(x)	‖	-	0	+	
g(x)	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3+Log2}{2}$	↗	$+\infty$

Remarque: Pour la limite de g en $+\infty$, on écrit : $g(x) = x(x - \frac{Logx}{x}) + 1$.

2) g admet un minimum absolu $\frac{3+Log2}{2}$ qui est strictement positif; par suite, pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a: g(x)>0

B)

$f(x) = x + 2 + \frac{Logx}{x}$ pour (x)>0

1) a) On utilise les opérations sur les fonctions dérivables et on calcule f'(x).

On trouve: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) D'après A)-2-on obtient le tableau de variation de f suivant :

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) a) On remarque que $\lim_{x\to+\infty} \frac{Logx}{x} = 0$ on en déduit que la droite

Δ : y = x+2 est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

b) La différence f(x)-(x+2)= $\frac{Logx}{x}$ a le signe suivant dans $]0,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$\frac{Logx}{x}$	‖	-	0	+	

D'où:

- Sur $]0,1[$ (C) est au dessous de Δ
- Sur $]1,+\infty[$ (C) est au dessus de Δ
- (C) $\cap \Delta = \{A(1,3)\}$

3) a) MN= $\left| f(x) - (x+2) \right| = \frac{Logx}{x}$

b) On pose F(x) $= \frac{Logx}{x}$, pour $x \geq 1$ on obtient le tableau de variation de F suivant:

x	1		e		$+\infty$
F'(x)		+	0	-	
F(x)	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

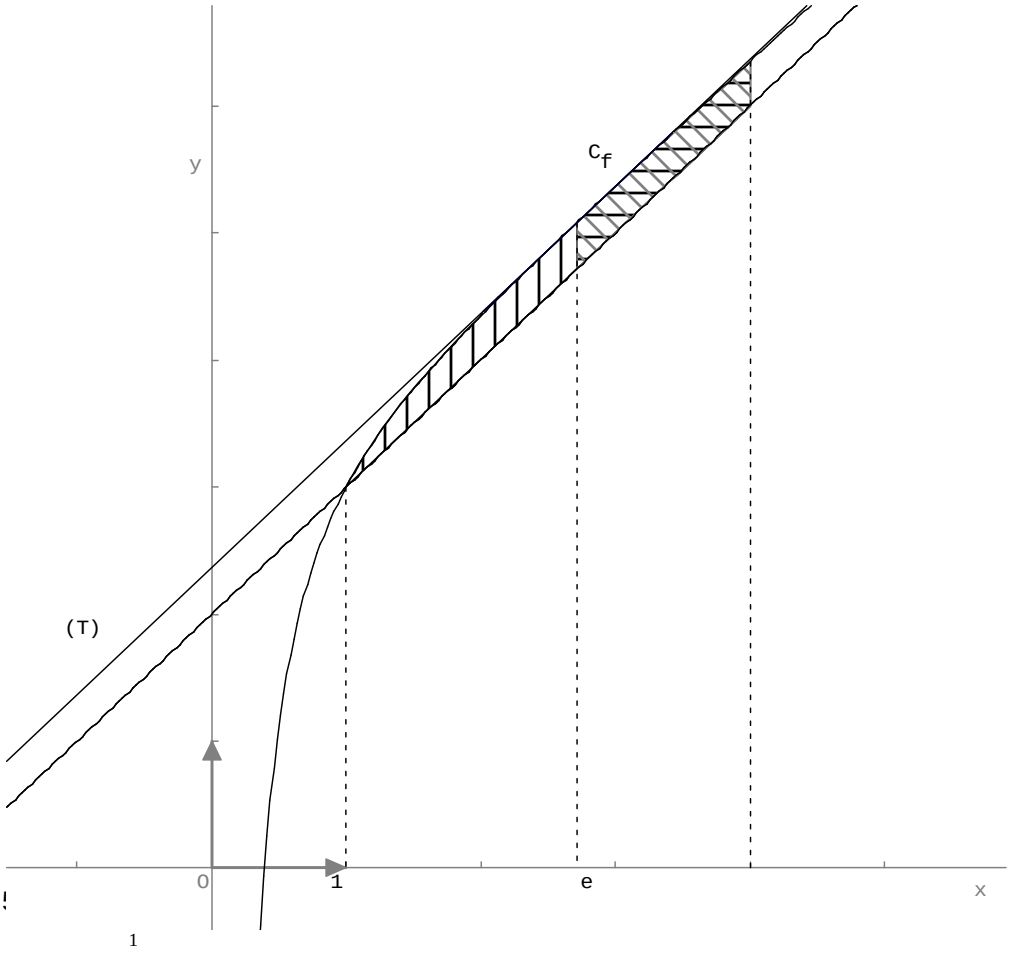
MN=F(x) est maximale pour x_0 = e

c)T: $y = f'(e)(x-2) + f(e)y$

$y = x + 2 + \frac{1}{e}$

T et Δ ont même coefficient directeur qui est 1 alors elles sont parallèles.

4) Voir figure:



A= $\int_1^e \frac{Logx}{x} dx \ u.a$

A= $\left[\frac{1}{2}(Logx)^2\right]_1^e = 0{,}5u.a$

On rappelle qu'une primitive d'une fonction f du type:

$f(x) = u'(x) \times u(x)^r ; \ (r \in Q^* \setminus \{-1\})$ est F: $x \sim \frac{(u(x))^{r+1}}{r+1}$

b) $A(\alpha) = \int_e^{\alpha} \frac{Logx}{x} dx \ u.a$

$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}(Log\alpha)^2 - 1\right) u.a$

$A(\alpha) = 0{,}5 \Leftrightarrow (Log\alpha)^2 = 2 \Leftrightarrow Log\alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = e^{\sqrt{2}} ((\alpha \ ¤ \ 1))$

Problème n°3 : (Session de Contrôle 2004)

I-1) Soit g la fonction définie sur $\Re$ par $g(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a $g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Etudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x : g(x)>0.

2) Soit f la fonction définie sur $\Re$ par $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1}$ *et* ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i , j)

a) Vérifier que pour tout réel x on a f'(x) = g(x).

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

c) dresser le tableau de variation de f.

3) a-Montrer que la droite Δ d'équation y = 2x-1 est une asymptote à ζ au voisinage de $+\infty$.

b- Ecrire une équation de la tangente T à ζ en O et étudier la position de T par rapport à ζ.

c-Tracer ζ , T et Δ dans le repère (O, i , j) . (on placera les point de ζ d'abscisses -1 et 1).

4) a-Vérifier que f réalise une bijection de $\Re$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$. [f^{-1} étant la fonction réciproque de f].

c- Tracer ζ ' la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, i , j)

II- Soit F la fonction définie sur $\Re$ par F(x)= $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+Log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$

1) Montrer que F est une primitive sur $\Re$ de la fonction h définie par h(x) = $\sqrt{x^2+1}$.

2) Soient E le point d'intersection de ζ avec la droite d'équation x=-1 et F le point d'intersection de ζ 'avec la droite d'équation y= -1.

Déterminer la mesure de l'aire du domaine plan limité par l'arc [$\overset{\Gamma}{OE}$] de la courbe ζ , l'arc [$\overset{\iota}{OF}$] la courbe ζ ' et les droites d'équations respectives x = -1 et y = -1

Corrigé :

I- De quoi s'agit-il?

Fonction contenant un radical :

- Variations – signe – asymptote – tangente
- Bijection – dérivée de la réciproque
- Courbes de f et de f^{-1}
- Primitive – calcul d'aire

II- Indications et commentaires:

I. 1) a) **Rappel :** Soient u et v deux fonctions dérivables sur I ; (I est un intervalle ouvert)

- Si v est non nulle sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a :

  $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v(x)^2}$; x ∈ I

- Si u est strictement positive sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I

  et on a : $\left(\sqrt{u(x)}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	$+\infty$

Pour la limite de g en $-\infty$; écrire g(x) = 1- $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Remarquer que g(x) > 0

1) a) On vérifie que f '(x) = g(x)

b) En écrivant f(x) = $(\sqrt{x^2+1}+x)-1 = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}-1$; on trouve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	-1	↗	$+\infty$

2) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-1)) = 0$

Ou bien :

Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$ puis $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = -1$

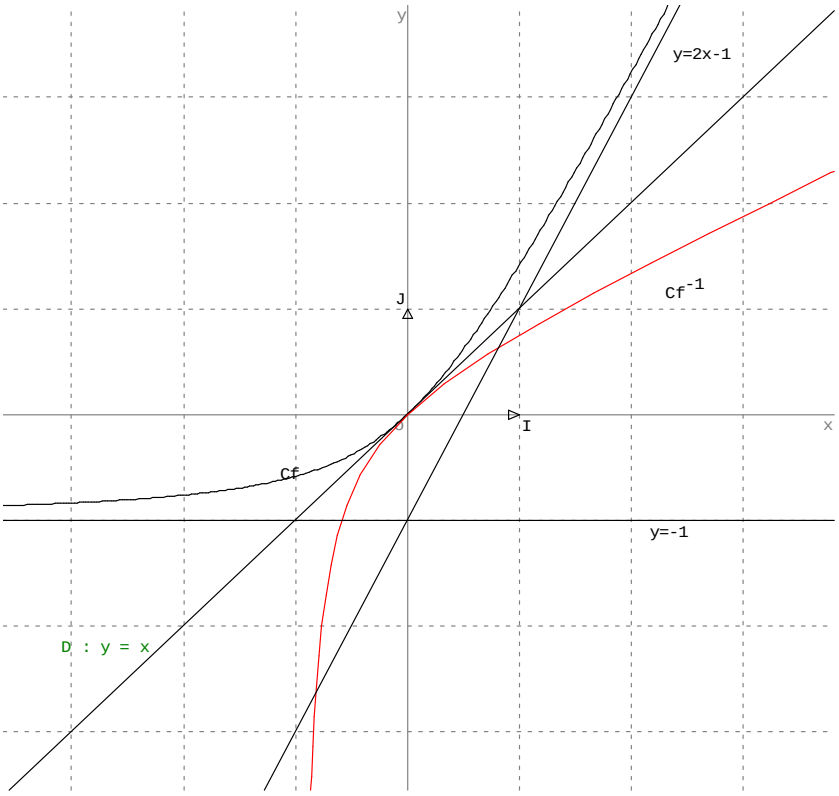
b) ***** On rappelle que T : y = f '(x)(x-x_0) + f(x_0)

On trouve T : y = x

* En écrivant f(x) – x = $\sqrt{x^2+1}-1 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$ on remarquera facilement

que la courbe (C) est au dessus de la tangente T.

c) Voir figure



3) a) - f est strictement croissante sur IR , alors elle réalise une bijection de IR sur son image J .

- Comme f est continue sur IR , alors J =]-1 ,+∞[

(l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle)

b) Comme f ' est non nulle sur IR , alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

Pour tout x de J ; $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1})(x)}$

D'après l'étude précédente , on remarque que $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = 1$

D'où :

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(1)} = 2 - \sqrt{2}$$

c) Voir figure.

II. 1) Remarquer que F est dérivable sur IR et vérifier que pour tout réel x ;
F'(x) = h(x)

2) En unités d'aire , $A = 2\int_{-1}^{0}(f(x)-x)dx = 2\int_{-1}^{0}(h(x)-1)dx = 2\left[F(x)-x\right]_{-1}^{0}$

$A = \text{Log}(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2$

Problème n°4: (Session de Contrôle 1998)

Le dessin ci-joint représente l'allure de la courbe (C) représentative d'une fonction f définie et dérivable sur IR, dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

I- Dans une partie, utiliser le graphique donné pour répondre aux questions suivantes :

1) Donner les solutions de l'équation $f'(x)=0$ dans l'intervalle $[-2,4]$, f' étant la dérivée de la fonction f.

2) donner le sens de variation de la restriction de f à l'intervalle $[-2,4]$.

3) donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $[-2,4]$.

4) a- montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[0,2]$ est une bijection de $[0,2]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b- Tracer, dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C') représentative de la fonction g^{-1} réciproque de g.

5) La restriction de f à l'intervalle $[-2,4]$ est –elle une bijection de $[-2,4]$ sur $f([-2,4])$?

II- la courbe (C) donnée est la présentation graphique de la fonction f définie sur IR par :

$f(x)=1-x^2e^{-x}$

1) a- Montrer que la courbe (C) admet ,au voisinage de $+\infty$,la droite d'équation y=1 Comme asymptote.

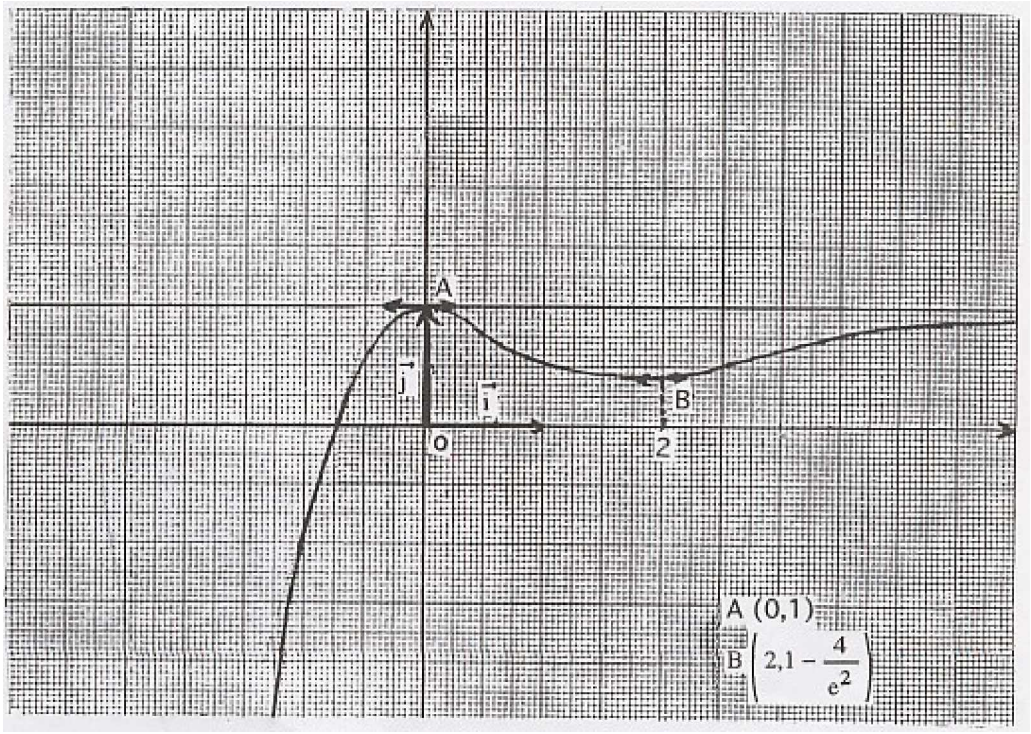
b-Montrer que (C) admet ,au voisinage de $-\infty$,une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) Soit $h(x)=f(x)-x$

a- Dresser le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0,2]$.

b- en déduire que, dans l'intervalle $[0,2]$ l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique que l'on notera α (on ne demande pas de calculer α).

3) Soit E le point d'intersection des deux courbes © et (C'), et K le point de coordonnées (1,0). Calculer, en fonction de α , l'aire du domaine limité par l'arc (AE) de la courbe (C), l'arc $(E\overset{\frown}{K})$ de la courbe (C') et les droites d'équations respectives x = 0 et y =0.



Corrigé :

I- De quoi s'agit –il ?

- Etude d'une fonction à partir de son graphique, restriction, bijection, fonction réciproque.
- Fonction en exponentielle –Branches infinies - Intersection d'une courbe (C) et (C') représentative de sa réciproque – Equation f(x)=x – Calcul d'aire d'un domaine compris entre 2 courbes en utilisant la symétrie.

II- Indications et commentaires :

I) 1) Solution de l'équation $f'(x)=0$

* penser à l'interprétation graphique de l'équation $f'(x)=0$

* chercher alors, sur le graphique, les abscisses des points où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

* conclure que l'équation $f'(x)=0$ admet dans $[-2,4]$ exactement deux solutions. Quelles sont ces deux solutions ?

2) Sens de variation de f sur $[-2,4]$

On peut déduire, par une simple lecture du graphique, le sens de variation de la restriction de f l'intervalle $[-2,4]$, résumé par le tableau suivant :

x	-2		0		2		4
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	1	↘	$1-\frac{4}{e^2}$	↗	

3) Nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans $[-2,4]$

* Attention : il ne s'agit pas de résoudre l'équation $f(x)=0$

* Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C) et du segment $[MN]$ où $M(-2,0)$ et $N(4,0)$: Trouver alors le nombre de ces points. D'où la réponse à la question posée.

4) a- g la restriction de f à $[0,2]$ est une bijection de $[0,2]$ sur un intervalle à préciser .**Remarque :** en général, et non toujours, cette question utilise le théorème : « si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de IR, alors f réalise une bijection de I sur f(I) qui est un intervalle »

Dans le cas présent :

- pourquoi g est-elle continue sur $[0,2]$
- g est strictement décroissante sur $[0,2]$

Donc g réalise une bijection de $[0,2]$ sur g ($[0,2]$)

Expliquer pourquoi a –t-on $g([0,2])=\left[1-\frac{4}{e^2},1\right]$?

b) Tracé de (C'), courbe représentative de g^{-1}

Le repère étant orthonormé, la courbe (C) est alors symétrique de la partie de (C) (correspond à $0 \le x \le 2$ par rapport à la droite y =x.

- prendre soin de marquer l'intersection de (C) avec la droite y =x qui appartient aussi à (C').
- attention : les tangentes horizontales à (C) sont transformées en tangentes verticales à (C').

5) La restriction de f à $[-2,4]$ est –elle une bijection de $[-2,4]$ sur $f([-2,4])$

Rappel : si f est une bijection d'un intervalle I de R sur f (I) alors pour tout $y_0 \in f(I)$, il existe $x_0 \in I, x_0$ unique tel que $f(x_0) = y_0$

Donc ; y-a-t-il des points de (C) qui ont même ordonnée et des abscisses différentes dans l'intervalle $[-2,4]$? que peut –on alors conclure ?

Réponse : la restriction de f à l'intervalle $[-2,4]$ n'est pas une bijection de l'intervalle $[-2,4]$ sur $f([-2,4])$ (chercher le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1 - \frac{4}{e^2}$ sur $[-2,4]$).

II) 1) a) (C) admet la droite d'équation y=1 comme asymptote au voisinage de $+\infty$

Il suffit de démontrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Remarquer que $f(x) = 1 - x^2 e^{-x} = 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$

Poser $X = -\frac{x}{2}$ et obtenir un résultat du cours $\left(\lim_{x \to -\infty} Xe^X = 0\right)$

b) (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction(y' y).

- Remarquer d'abord que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- Calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Conclure.

2) a) Tableau de variation de $h : x \to f(x) - x$ sur $[0,2]$

Remarquer que h est dérivable sur $[0,2]$ puisque f' est $h'(x) = f'(x) - 1$

Calculer $f'(x)$. Vérifier que pour $x \in [0,2]$ $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$. Conclure alors pour le signe de $h'(x)$.

On obtient le tableau suivant :

x	0		2
h'(x)			
h(x)	1	↘	$1 - \frac{4}{e^2}$

b) $f(x) = x$ admet une solution unique notée α sur $[0,2]$

* Remarquer que : $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$

* montrer alors que h réalise une bijection de $[0,2]$ sur $\left[-1 - \frac{4}{e^2}, 1\right]$ et que $0 \in \left[-1 - \frac{4}{e^2}, 1\right]$. Conclure.

3) Soit A l'aire demandée.

En se rappelant que (C') est symétrique de (C) par rapport à la droite y =x, montrer que

$A = 2\int_0^{\alpha} \left(f(x) - x \right) dx.$

Penser à faire deux intégrations par parties.

En général $\int_a^b x^n e^x dx$ s'obtient par n d'intégrations par parties, n étant un entier naturel non nul.

On trouve : $A = \left[\left(-\alpha^2 + 2\alpha - 4 \right) + 2\left(\alpha^2 + 2\alpha + 2 \right) e^{-\alpha} \right]$ unités d'aire.

